Cifrari ed equazioni alle differenze

Roberto La Scala

Università di Bari

Seminario CrypTO, 19 Aprile 2021

MOTIVAZIONE

- Molti cifrari a flusso o a blocchi, largamente utilizzati in importanti applicazioni, sono essenzialmente regole ricorsive che determinano l'evoluzione nel tempo (clock) di un vettore (stato, registro) con entrate in un campo finito.
- Tale ricorsione è definita da una funzione vettoriale di transizione (di stato) che generalmente è quella associata ad un sistema di equazioni esplicite alle differenze (ordinarie).
- Diamo subito un paio di esempi che ci guideranno nella formalizzazione della nozione di *cifrario alle differenze*.

- **Trivium** è un cifrario sviluppato in Europa (Bart Preneel, Belgio) nell'ambito del progetto eSTREAM.
- È uno dei tre vincitori della call per lo sviluppo di cifrari a flusso efficienti in hardware.
- Trivium è stato pubblicato nel 2003 e nonostante la sua struttura estremamente semplice, nessuno attacco definitivo è stato portato a questo cifrario fino ad oggi.

Equazioni di stato:

$$\begin{cases} x(93) &= z(45) + x(24) + z(0) + z(1)z(2), \\ y(84) &= x(27) + y(6) + x(0) + x(1)x(2), \\ z(111) &= z(24) + y(15) + y(0) + y(1)y(2). \end{cases}$$

- Le soluzioni di questo sistema di 3 equazioni quadratiche alle differenze sono terne di funzioni (successioni) $x, y, z : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$.
- Essendo equazioni alle differenze di tipo esplicito, si ha una corrispondenza 1-1 fra le soluzioni e lo stato iniziale

$$v(0) = (x(0), \ldots, x(92), y(0), \ldots, x(83), z(0), \ldots, z(110))$$

- Per un qualsiasi clock $t \geq 0$, lo stato (registro) del sistema è quindi definito come il vettore di $\mathbb{Z}_2^{288}$ $(93 + 84 + 111 = 288)$

$$v(t) = (x(t), \ldots, x(92 + t), y(t), \ldots, x(83 + t), z(t), \ldots, z(110 + t))$$

- La funzione di transizione di stato è la mappa vettoriale polinomiale $\mathbb{Z}_2^{288} \to \mathbb{Z}_2^{288}$ tale che $v(t) \mapsto v(t + 1)$, per ogni $t \geq 0$.

- La chiave ed il IV della cifratura costituiscono $80 + 80 = 160$ bit dello stato iniziale. I restanti 128 bit sono prefissati.
- Accanto al sistema alle differenze che determina l'evoluzione dello stato in Trivium, il keystream è ottenuto mediante un polinomio lineare omogeneo

Polinomio di keystream:

$$f = x(27) + x(0) + y(15) + y(0) + z(45) + z(0)$$

- Al clock t, il keystream è definito come il valore del polinomio f calcolato sullo stato $v(t)$.
- Il keystream va in output per i clock $t \geq T = 4 \cdot 288 = 1152$, in modo da proteggere lo stato iniziale ovvero la chiave della cifratura.

- Una variante di Trivium molto studiata in crittoanalisi è **Bivium**

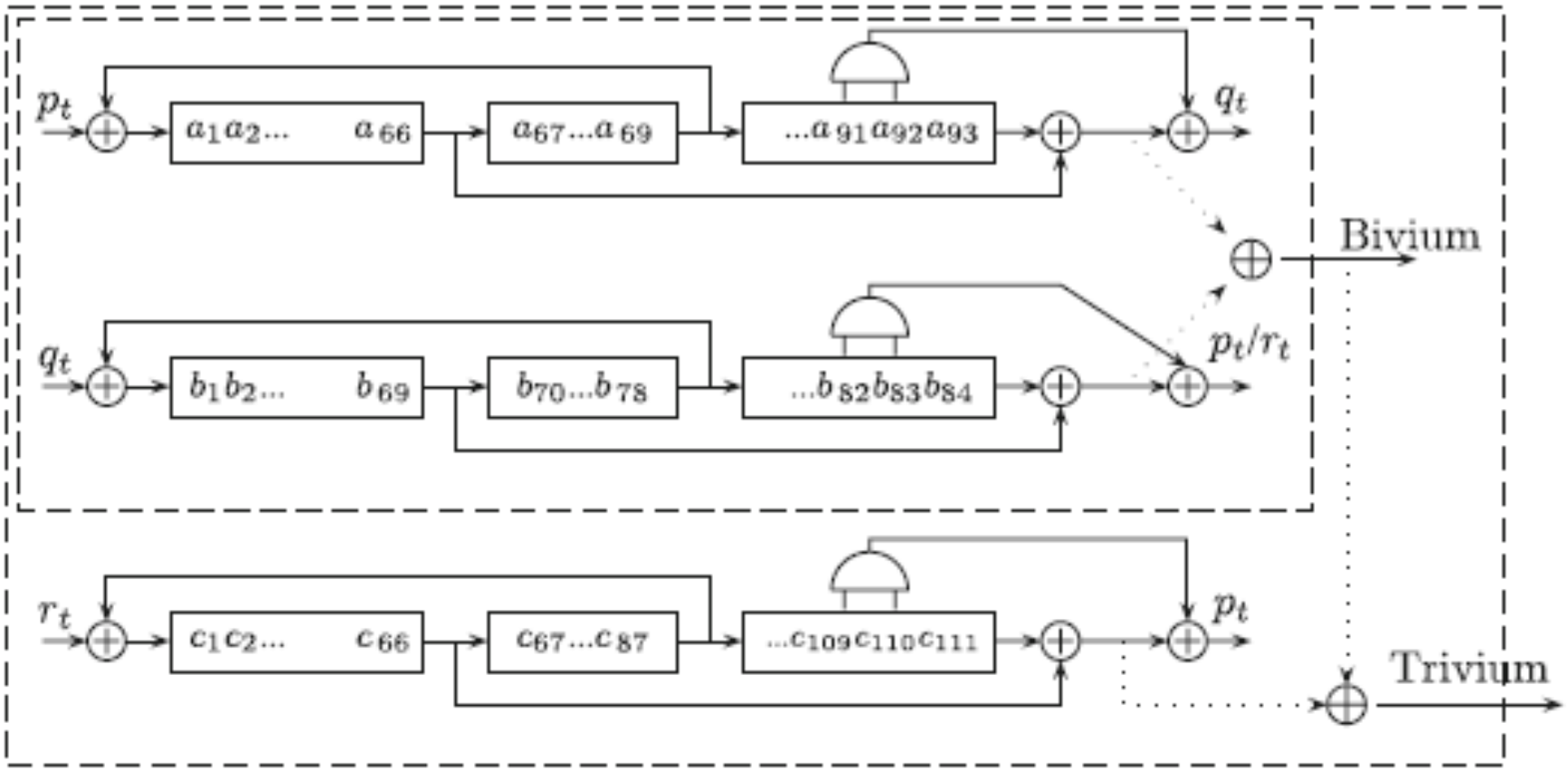
Equazioni di stato:

$$\begin{cases} x(93) &= x(24) + y(15) + y(0) + y(1)y(2), \\ y(84) &= x(27) + y(6) + x(0) + x(1)x(2). \end{cases}$$

Polinomio di keystream:

$$f = x(27) + x(0) + y(15) + y(0).$$

- Lo stato è quindi un vettore di $\mathbb{Z}_2^{177}$ $(93 + 84 = 177)$ ed il keystream va in output dopo $T = 4 \cdot 177 = 708$ clock.


p_t
$a_1 a_2 \ldots$ a_{66}
$a_{67} \ldots a_{69}$
$\ldots a_{91} a_{92} a_{93}$
q_t
Bivium
q_t
$b_1 b_2 \ldots$ b_{69}
$b_{70} \ldots b_{78}$
$\ldots b_{82} b_{83} b_{84}$
p_t / r_t
r_t
$c_1 c_2 \ldots$ c_{66}
$c_{67} \ldots c_{87}$
$\ldots c_{109} c_{110} c_{111}$
p_t
Trivium

- Osserviamo che le funzioni di transizione di stato di Bivium e Trivium sono invertibili ovvero è possibile calcolare lo stato iniziale (chiave) a partire da un qualsiasi stato.
- Questa è una potenziale vulnerabilità in quanto è possibile attaccare lo stato al clock T corrispondente all'inizio del keystream.
- D'altra parte, l'invertibilità (e la riducibilità) di un sistema alle differenze può essere considerata una risorsa per costruire un cifrario simmetrico.

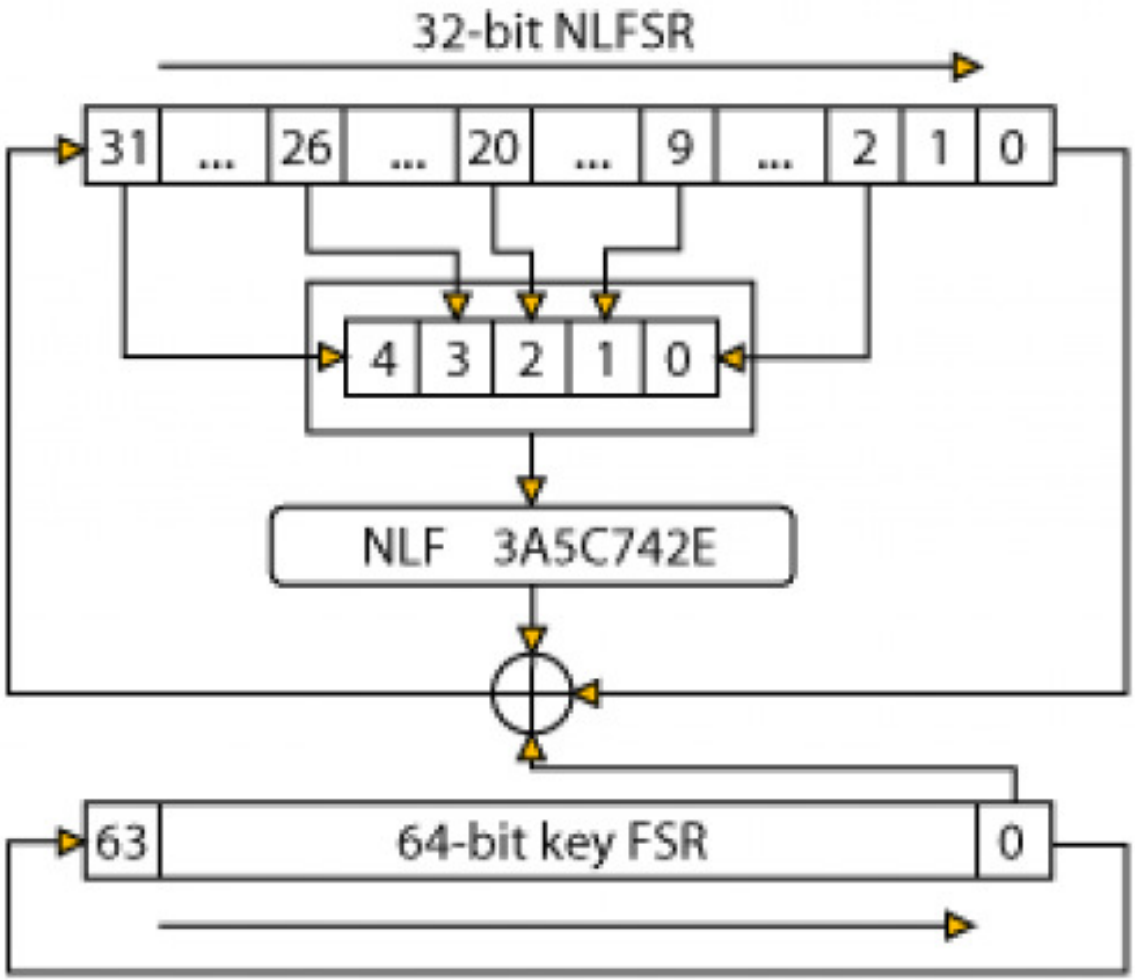
- Un sistema invertibile contenente un sottosistema definito su un sottoinsieme di variabili definisce un cifrario simmetrico.
- Lo stato iniziale $u(0)$ del sottosistema è la chiave della cifratura. Lo stato iniziale del sistema $(u(0), v(0))$ è costituito dalla chiave e dal plaintext $v(0)$.
- Se $(u(T), v(T))$ è lo stato finale del sistema ad un clock T prefissato, il ciphertext è costituito dal vettore $v(T)$.
- Per decifrare, utilizzando il sottosistema si può calcolare $u(T)$ a partire della chiave $u(0)$. Il sistema inverso è poi capace di calcolare lo stato iniziale $(u(0), v(0))$, e quindi il plaintext $v(0)$, a partire dallo stato finale $(u(T), v(T))$.

- Un esempio fondamentale di un tale cifrario è **Keeloq**, utilizzato nei transponder RFID per immobilizzatori auto, aperture porte, etc.
- Venduto il brevetto nel 1995 per 10^7 USD, questo cifrario è stato crittoanalizzato in modo critico nel 2008.

Keeloq:

$$\begin{cases} k(64) = k(0), \\ x(32) = k(0) + x(0) + x(16) + x(9) + x(1) + x(31)x(20) \\ \quad + x(31)x(1) + x(26)x(20) + x(26)x(1) + x(20)x(9) \\ \quad + x(9)x(1) + x(31)x(9)x(1) + x(31)x(20)x(1) \\ \quad + x(31)x(26)x(9) + x(31)x(26)x(20). \end{cases}$$

- Il sottosistema di chiave è costituito dalla singola equazione $k(64) = k(0)$.
- Lo stato del sistema $(u(t), v(t))$ è un vettore di $\mathbb{Z}_2^{96}$ $(64 + 32 = 96)$. Lo stato del sottosistema di chiave è il vettore $u(t) \in \mathbb{Z}_2^{64}$.
- Il clock finale del cifrario è $T = 8 \cdot 64 + 16 = 528$.
- Dunque, la chiave è $u(0) = (k(0), \ldots, k(63))$, il plaintext è $v(0) = (x(0), \ldots, x(31))$ ed il ciphertext è $v(528)$.
- Una importante vulnerabilità di Keeloq è costituita dal breve periodo 64 (della funzione di transizione di stato) del sottosistema di chiave. Questo permette un efficace attacco di tipo meet-in-the-middle.


32-bit NLFSR
31
...
26
...
20
...
9
...
2
1
0
4
3
2
1
0
NLF 3A5C742E
63
64-bit key FSR
0

FORMALIZZAZIONE

- Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi. Sia $X(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ un insieme di variabili, per ogni intero (clock) $t \geq 0$. Consideriamo l'algebra dei polinomi $R = \mathbb{K}[X]$ sull'insieme infinito di variabili $X = \bigcup_{t \geq 0} X(t)$.
- Consideriamo l'endomorfismo di algebre $\sigma : R \to R$ tale che $x_i(t) \mapsto x_i(t+1)$. Chiamiamo σ *l'operatore di shift di* R.
- L'algebra R, dotata dell'endomorfismo σ, si chiama *l'algebra dei polinomi alle differenze (ordinarie) nelle variabili* $x_1, \ldots, x_n$.
- Consideriamo ora gli interi $r_1, \ldots, r_n \geq 0$. Definiamo il sottinsieme

$$\bar{X} = \{x_1(0), \ldots, x_1(r_1 - 1), \ldots, x_n(0), \ldots, x_n(r_n - 1)\} \subset X$$

e la sottoalgebra $\bar{R} = \mathbb{K}[\bar{X}] \subset R$.

Definizione

Siano $f_1, \ldots, f_n$ *polinomi di* $\bar{R}$. *Un* sistema di equazioni esplicite alle differenze (ordinarie) *è un sistema infinito di equazioni algebriche del tipo*

$$\begin{cases} x_1(r_1 + t) &= \sigma^t(f_1), \\ &\vdots \\ x_n(r_n + t) &= \sigma^t(f_n). \end{cases} \qquad (t \geq 0)$$

Tale sistema si denota brevemente come

$$\begin{cases} x_1(r_1) &= f_1, \\ &\vdots \\ x_n(r_n) &= f_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Una $\mathbb{K}$-soluzione del sistema (1) *è quindi una n-upla* $(a_1, \ldots, a_n)$ *di funzioni (successioni)* $a_i : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *che soddisfano le equazioni* $x_i(r_i + t) = \sigma^t(f_i)$, *per ogni* $t \geq 0$.

Definizione

Per ogni sistema (1)*, definiamo il corrispondente endomorfismo di algebre* $\bar{\mathrm{T}} : \bar{R} \to \bar{R}$ *tale che* $(1 \leq i \leq n)$

$$x_i(0) \mapsto x_i(1), \ldots, x_i(r_i - 2) \mapsto x_i(r_i - 1), x_i(r_i - 1) \mapsto f_i.$$

Se $r = r_1 + \ldots + r_n$*, denotiamo* $\mathrm{T} : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ *la funzione polinomiale vettoriale corrispondente a* $\bar{\mathrm{T}}$*. Allora, per ogni* $t \geq 0$ *abbiamo* $\mathrm{T} : v(t) \mapsto v(t+1)$ *dove*

$$v(t) = (a_1(t), \ldots, a_1(t + r_1 - 1), \ldots, a_n(t), \ldots, a_n(t + r_n - 1)) \in \mathbb{K}^r$$

è lo stato al clock t *di una qualsiasi* $\mathbb{K}$*-soluzione* $(a_1, \ldots, a_n)$*. Chiamiamo* $\bar{\mathrm{T}}$ l'endomorfismo *e* T *la* funzione di transizione di stato del sistema (1)*.*

Proposizione

Denotiamo con $V_{\mathbb{K}}$ *l'insieme di tutte le* $\mathbb{K}$*-soluzioni del sistema* (1)*. Abbiamo una bigezione* $\iota : V_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}^r$ *tale che*

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1(0), \ldots, a_1(r_1 - 1), \ldots, a_n(0), \ldots, a_n(r_n - 1)).$$

In altri termini, il sistema (1) *ammette un'unica soluzione una volta fissato il suo stato iniziale. Inoltre, le funzioni* ι, ι^{-1} *sono entrambe polinomiali.*

Definizione

Consideriamo l'endomorfismo $\bar{\mathrm{T}} : \bar{R} \to \bar{R}$ *e la corrispondente funzione di transizione di stato* $\mathrm{T} : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$*. Diremo che il sistema* (1) *è* invertibile *se* $\bar{\mathrm{T}}$ *è un automorfismo. In tal caso, anche* T *è una funzione bigettiva.*

Le basi di Gröbner forniscono un metodo algoritmico per stabilire se un endomorfismo è invertibile e per calcolarne l'inverso.

Teorema

Siano $X = \{x_1, \ldots, x_r\}, X' = \{x'_1, \ldots, x'_r\}$ *due insiemi di variabili e definiamo le algebre polinomiali* $P = \mathbb{K}[X], P' = \mathbb{K}[X']$ *e* $Q = \mathbb{K}[X \cup X'] = P \otimes P'$. *Consideriamo un endomorfismo* $\varphi : P \to P$ *tale che* $x_1 \mapsto g_1, \ldots, x_r \mapsto g_r$ $(g_i \in P)$ *ed il corrispondente ideale* $J \subset Q$ *generato dall'insieme* $\{x'_1 - g_1, \ldots, x'_r - g_r\}$. *Dotiamo inoltre* Q *di un ordinamento monomiale prodotto tale che* $X \succ X'$. *Allora,* φ *è un automorfismo di* P *se e solo se la base di Gröbner ridotta di* J *è del tipo* $\{x_1 - g'_1, \ldots, x_r - g'_r\}$ *dove* $g'_i \in P'$. *In questo caso, a meno di identificare* P, P' *(isomorfismo), abbiamo che l'automorfismo inverso* $\varphi^{-1} : P \to P$ *è definito come* $x_1 \mapsto g'_1, \ldots, x_r \mapsto g'_r$.

In particolare, per i sistemi espliciti alle differenze abbiamo

Proposizione

Sia $\bar{\mathrm{T}} : \bar{R} \to \bar{R}$ *l'automorfismo di transizione di stato corrispondente al sistema invertibile (1), precisamente*

$$x_i(0) \mapsto x_i(1), \ldots, x_i(r_i - 2) \mapsto x_i(r_i - 1), x_i(r_i - 1) \mapsto f_i.$$

Poniamo $\bar{R}' = \mathbb{K}[\bar{X}']$ *e sia* $Q = \bar{R} \otimes \bar{R}'$*. Consideriamo l'ideale* $J \subset Q$ *generato dai polinomi*

$$x_i'(0) - x_i(1), \ldots, x_i'(r_i - 2) - x_i(r_i - 1), x_i'(r_i - 1) - f_i.$$

Allora, la base di Gröbner ridotta di J *è del tipo*

$$x_i(1) - x_i'(0), \ldots, x_i(r_i - 1) - x_i'(r_i - 2), x_i(0) - f_i'.$$

dove $f_i' \in \bar{R}'$ $(1 \leq i \leq n)$.

Definizione

Con le notazioni del precedente risultato, sia g_i l'immagine del polinomio f_i' rispetto all'isomorfismo $\bar{R}' \to \bar{R}$ tale che

$$x_i'(0) \mapsto x_i(r_i - 1), x_i'(1) \mapsto x_i(r_i - 2), \ldots, x_i'(r_i - 1) \mapsto x_i(0).$$

Il sistema inverso *del sistema invertibile* (1) *è per definizione*

$$\begin{cases} x_1(r_1) &= g_1, \\ &\vdots \\ x_n(r_n) &= g_n. \end{cases} \tag{2}$$

- Gli endomorfismi (e quindi le funzioni) di transizione di stato di un sistema invertibile (1) e del suo sistema inverso (2) sono l'uno l'inverso dell'altro a meno della permutazione di variabili (isomorfismo)

$$x_i(0) \mapsto x_i(r_i - 1), x_i(1) \mapsto x_i(r_i - 2), \ldots, x_i(r_i - 1) \mapsto x_i(0).$$

- Questo permette di calcolare lo stato iniziale $v(0)$ da uno stato qualsiasi $v(t)$ di (1) considerando $v(t)$ come stato iniziale di (2) (a meno di riordinare le coordinate).
- Ad esempio, l'inverso del sistema delle equazioni di stato di Trivium è

$$\begin{cases} x(93) &= y(0) + x(66) + y(78) + x(91)x(92), \\ y(84) &= z(0) + y(69) + z(87) + y(82)y(83), \\ z(111) &= x(0) + z(66) + x(69) + z(109)z(110). \end{cases}$$

È utile introdurre un altro paio di nozioni.

Definizione

Un sistema (1) *si dice* riducibile *se per qualche* $m < n$ *ammette un sottosistema*

$$\begin{cases} x_1(r_1) &= f_1, \\ &\vdots \\ x_m(r_m) &= f_m \end{cases} \tag{3}$$

dove i polinomi $f_i \in \bar{R}_m = \mathbb{K}[\bar{X}_m]$ *con*

$$\bar{X}_m = \{x_1(0), \ldots, x_1(r_1 - 1), \ldots, x_m(0), \ldots, x_m(r_m - 1)\}.$$

In questo caso, l'endomorfismo e la funzione di transizione di stato di (3) *sono le restrizioni delle corrispondenti mappe di* (1).

Definizione

Sia $\mathrm{T} : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ *la funzione di transizione di stato di un sistema invertibile. Chiamiamo il sistema* periodico *se esiste un intero* $d > 0$ *tale che* $\mathrm{T}^d = \mathrm{id}$. *In tal caso, tutte le* $\mathbb{K}$*-soluzioni* $(a_1, \ldots, a_n)$ *sono costituite da funzioni periodiche, cioè* $a_i(t) = a_i(t + d)$ *per ogni* $t \geq 0$. *Poichè* $\mathrm{T} \in \mathbb{S}(\mathbb{K}^r)$, *se* $\mathbb{K}$ *è un campo finito allora tutti i sistemi invertibili sono periodici.*

Problema aperto: calcolare e massimizzare il periodo di T nel caso non-lineare (per i sistemi di LFSR è facile).

Nel seguito assumiamo $\mathbb{K} = \mathrm{GF}(q)$ un campo finito.

Definizione

Un cifrario a flusso alle differenze $\mathcal{C}$ *è per definizione un sistema esplicito alle differenze* (1) *insieme ad un polinomio* $f \in \bar{R}$. *Se* $(a_1, \ldots, a_n)$ *è una* $\mathbb{K}$*-soluzione, il suo stato iniziale è chiamato la* chiave di $(a_1, \ldots, a_n)$. *Inoltre, se il vettore* $v(t) \in \mathbb{K}^r$ *denota uno stato di* $(a_1, \ldots, a_n)$, *la funzione* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *tale che* $b(t) = f(v(t))$ *per ogni* $t \geq 0$, *si chiama il* keystream di $(a_1, \ldots, a_n)$. *Infine, chiamiamo* f *il* polinomio di keystream del cifrario $\mathcal{C}$.

Notiamo che un tale cifrario si può definire pure come uno speciale sistema esplicito

$$\begin{cases} x_1(r_1) &= f_1, \\ &\vdots \\ x_n(r_n) &= f_n, \\ y(0) &= f. \end{cases}$$

Definizione

Sia $\mathcal{C}$ un cifrario a flusso definito dal sistema (1) *e dal polinomio f. Sia $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ il keystream di una $\mathbb{K}$-soluzione di* (1) *e fissiamo un clock $T \geq 0$. Consideriamo l'ideale*

$$J = \sum_{t \geq T} \langle \sigma^t(f) - b(t) \rangle \subset R$$

e denotiamo con $V_{\mathbb{K}}(J)$ l'insieme delle $\mathbb{K}$-soluzioni dei polinomi di J, equivalentemente, dei suoi generatori. Un attacco algebrico a $\mathcal{C}$ mediante il keystream b a partire dal clock T *consiste nel calcolo delle $\mathbb{K}$-soluzioni $(a_1, \ldots, a_n)$ del sistema* (1) *tali che $(a_1, \ldots, a_n) \in V_{\mathbb{K}}(J)$. In altri termini, se consideriamo l'ideale (alle differenze) di R associato ad* (1)

$$I = \langle x_1(r_1) - f_1, \ldots, x_n(r_n) - f_n \rangle_\sigma =$$

$$\langle x_1(r_1 + t) - \sigma^t(f_1), \ldots, x_n(r_n + t) - \sigma^t(f_n) \mid t \geq 0 \rangle,$$

si vuole calcolare $V_{\mathbb{K}}(I + J) = V_{\mathbb{K}}(I) \cap V_{\mathbb{K}}(J) = V_{\mathbb{K}} \cap V_{\mathbb{K}}(J)$.

- Per definizione, $V_{\mathbb{K}}(I+J)$ è la varietà delle $\mathbb{K}$-soluzioni del sistema (1) che sono compatibili con il keystream osservato $b(t)$ ($t \geq T$). Gli stati iniziali di queste soluzioni sono le chiavi compatibili con il keystream.

- Potrebbe essere conveniente calcolare direttamente le equazioni della varietà $\bar{V}_{\mathbb{K}}(I+J) \subset \mathbb{K}^r$ delle chiavi compatibili con il keystream. Questa è l'immagine della varietà $V_{\mathbb{K}}(I+J)$ rispetto alla bigezione polinomiale $V_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}^r$ che mappa le $\mathbb{K}$-soluzioni del sistema (1) nei loro stati iniziali.

Assumiamo $x_i(r_i) \succ \mathrm{lm}(f_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ per un ordinamento monomiale di R compatibile con l'operatore di shift σ ($m \prec n$ implica $\sigma(m) \prec \sigma(n)$). Allora, l'insieme $\{x_1(r_1) - f_1, \ldots, x_n(r_n) - f_n\}$ è una *base di Gröbner alle differenze di I*, cioè $\{x_1(r_1 + t) - \sigma^t(f_1), \ldots, x_n(r_n + t) - \sigma^t(f_n) \mid t \geq 0\}$ è una base di Gröbner di I.

Proposizione

Denotiamo con $f'_t \in \bar{R}$ la forma normale del polinomio $\sigma^t(f)$ modulo I e definiamo l'ideale

$$J' = \sum_{t \geq T} \langle f'_t - b(t) \rangle \subset \bar{R}.$$

Abbiamo allora che $\bar{V}_{\mathbb{K}}(I + J) = V_{\mathbb{K}}(J')$. In altri termini, le equazioni soddisfatte dalle chiavi compatibili con il keystream sono

$$f'_t = b(t) \ (t \geq T).$$

- In un vero attacco algebrico abbiamo solo un numero finito di valori del keystream, ovvero dato un clock $B \geq T$ possiamo effettivamente costruire l'ideale

$$J'_B = \sum_{T \leq t \leq B} \langle f'_t - b(t) \rangle \subset \bar{R}.$$

- Chiaramente $J' = \bigcup_{B \geq T} J'_B$ con $J'_B \subset J'_{B+1}$. Poichè l'algebra $\bar{R}$ è finitamente generata e quindi Noetheriana, abbiamo che $J'_B = J'$ per un opportuno clock $B \geq T$.
- In altri termini, con un numero sufficiente di valori del keystream non perdiamo alcuna equazione soddisfatta dalle chiavi.

Per calcolare l'insieme delle chiavi $V_{\mathbb{K}}(J'_B) \subset \mathbb{K}^r$ possiamo usare basi di Gröbner oppure SAT solvers se $\mathbb{K} = \mathrm{GF}(2)$. Per i cifrari reali, abbiamo generalmente che $V_{\mathbb{K}}(J'_B)$ contiene una singola chiave. Possiamo applicare quindi il seguente risultato che segue essenzialmente dal Nullstellensatz per i campi finiti.

Proposizione

Consideriamo l'algebra $P = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ ($\mathbb{K} = \mathrm{GF}(q)$) e l'ideale $L = \langle x_1^q - x_1, \ldots, x_r^q - x_r \rangle \subset P$. Sia $J \subset P$ un ideale e denotiamo con $V(J)$ l'insieme delle $\bar{\mathbb{K}}$-soluzioni dei polinomi $f \in J$ dove il campo $\bar{\mathbb{K}}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$. Abbiamo allora che $V(L) = \mathbb{K}^r$ e $V_{\mathbb{K}}(J) = V(J) \cap \mathbb{K}^r = V(J + L)$ dove $J + L \subset P$ è un ideale radicale. Inoltre, se $V_{\mathbb{K}}(J) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\}$ allora $G = \{x_1 - \alpha_1, \ldots, x_r - \alpha_r\}$ è la base di Gröbner universale (ridotta) di $J + L$, cioè, G è la sua base di Gröbner rispetto ad ogni ordinamento monomiale di P.

- Questo risultato è molto utile per implementare attacchi algebrici perchè il calcolo delle basi di Gröbner è molto sensibile agli ordinamenti monomiali scelti. Nel caso di soluzione unica siamo liberi di scegliere gli ordinamenti più efficienti come DegRevLex.
- Un'altra possibile ottimizzazione per questo caso consiste nel terminare l'algoritmo di Buchberger quando tutte le variabili x_i si sono ottenute come leading monomial di un elemento nella base corrente.
- Osserviamo che la forma normale f'_t del polinomio $\sigma^t(f)$ ($T \leq t \leq B$) ha generalmente grado alto se il clock iniziale T del keystream è grande, come accade in molti cifrari reali.

- Se il sistema (1) è invertibile, possiamo assumere di fatto $T = 0$. Infatti, grazie al sistema inverso possiamo attaccare lo stato al clock T piuttosto che lo stato iniziale, cioè, la chiave. Questo è una ottimizzazione molto importante perchè riduce drasticamente i gradi dei generatori dell'ideale $J'_B = \sum_{T \leq t \leq B} \langle f'_t - b(t) \rangle$ a quelli dei generatori dell'ideale

$$J''_B = \sum_{0 \leq t \leq B-T} \langle f'_t - b(T+t) \rangle.$$

  Abbiamo usato questa strategia per attaccare Bivium.
- Se le forme normali f'_t continuano ad avere gradi troppi alti, una strategia alternativa consiste nel calcolare direttamente le $\mathbb{K}$-soluzioni del sistema (1) che sono pure soluzioni delle equazioni $\sigma^t(f) = b(t)$ che hanno tutte lo stesso grado. Questa strategia ha lo svantaggio di richiedere il calcolo di una base di Gröbner su un numero elevato di variabili.

- Quando calcoliamo una base di Gröbner per ottenere le soluzioni di un sistema, una strategia fondamentale consiste nell'aggiungere polinomi lineari all'ideale considerato $J \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ al fine di accellerare il calcolo.
- Questi polinomi lineari possono essere elementi di J (noti o calcolati) oppure corrispondenti alle assegnazioni di qualche sottinsieme di variabili $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \subset \{x_1, \ldots, x_r\}$.
- Se qualcuna di queste assegnazioni è errata, abbiamo allora

$$J + \langle x_{i_1} - \alpha_{i_1}, \ldots, x_{i_s} - \alpha_{i_s} \rangle = \langle 1 \rangle$$

  ed il calcolo della base di Gröbner si arresta non appena l'elemento 1 è stato ottenuto.
- Per un SAT solver, invece, la risposta "UNSAT" arriva essenzialmente quando l'intero spazio $\mathbb{K}^r$ ($\mathbb{K} = \mathrm{GF}(2)$) è stato esaminato.

- Per le assegnazioni errate, che sono tutte tranne una, le basi di Gröbner sono quindi generalmente piú efficienti dei SAT solver. Abbiamo verificato questo in pratica nei nostri esperimenti.
- Risolvere un sistema algebrico mediante l'assegnazione esaustiva di un sottinsieme di variabili si chiama una *guess-and-determine (o hybrid) strategy*.
- La sua complessità è $q^s \cdot \tau$ dove q^s è il numero delle assegnazioni possibili di s variabili ($\mathbb{K} = \mathrm{GF}(q)$) e τ è il tempo di calcolo medio per una singola base di Gröbner. Naturalmente possiamo assumere mediamente di trovare la soluzione in tempo $(q^s/2) \cdot \tau$.
- È chiaro quindi che una ottimizzazione fondamentale è la scelta di queste variabili. La parallelizzazione del calcolo per differenti assegnazioni ha pure un impatto importante.

- Per il nostro attacco algebrico a Bivium, assegnamo in modo esaustivo 38 variabili. Grazie ad equazioni lineari presenti nel sistema, si ottiene di fatto l'assegnazione di 60 variabili sul totale di 177 variabili di stato. Le restanti 117 variabili sono risolte mediante basi di Gröbner o SAT solver.
- Per le basi di Gröbner, si sono utilizzate un paio di implementazioni dell'algoritmo di Buchberger che si trovano nel sistema di calcolo simbolico SINGULAR.
- Abbiamo confrontato queste implementazioni con un paio di SAT solver molto utilizzati in Crittografia: MiniSat e CryptoMinisat.
- Il tempo di calcolo totale del nostro attacco su un singolo processore è circa 2^{34} sec. L'attacco può essere naturalmente parallelizzato.

Assegnazione corretta

# ks bits	slimgb	std	MiniSat	CrMiniSat
180	175 ms	338 ms	15.41 s	14.66 s
185	162 ms	332 ms	12.68 s	13.25 s
190	119 ms	336 ms	10.71 s	11.85 s
195	151 ms	418 ms	10.95 s	14.39 s

Assegnazioni errate (tempi medi)

# ks bits	slimgb	std	MiniSat	CrMiniSat
180	173 ms	352 ms	52 s	25.52 s
185	170 ms	368 ms	34.62 s	19.61 s
190	119 ms	364 ms	37.28 s	19.72 s
195	129 ms	381 ms	37.41 s	18.85 s

Richiamiamo la seguente definizione.

Definizione

Un sistema esplicito alle differenze (1) *si dice* riducibile *se per qualche* $m < n$ *ammette un sottosistema*

$$\begin{cases} x_1(r_1) &= f_1, \\ &\vdots \\ x_m(r_m) &= f_m \end{cases} \tag{4}$$

dove $f_i \in \bar{R}_m = \mathbb{K}[\bar{X}_m]$ *con*

$$\bar{X}_m = \{x_1(0), \ldots, x_1(r_1 - 1), \ldots, x_m(0), \ldots, x_m(r_m - 1)\}.$$

Definizione

Un cifrario a blocchi alle differenze $\mathcal{C}$ *è per definizione un sistema invertibile e riducibile* (1) *insieme ad un intero* $T \geq 0$. *Se* (4) *è il sottosistema di* (1)*, poniamo* $k = r_1 + \ldots + r_m, l = r_{m+1} + \ldots + r_n$.

Se $(u(t), v(t)) \in \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^l$ *è lo stato al clock* t *di una* $\mathbb{K}$*-soluzione* $(a_1, \ldots, a_n)$*, chiamiamo* $u(0)$ *la* chiave*,* $v(0)$ *il* plaintext *e* $v(T)$ *il* ciphertext di $(a_1, \ldots, a_n)$. *Inoltre, chiamiamo* (4) *il* sottosistema di chiave del cifrario $\mathcal{C}$.

La funzione di cifratura $E_{u(0)} : \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^l$ *è quindi data dalla mappa* $v(0) \mapsto v(T)$.

Definizione

Sia (2) *il sistema inverso e* (4) *il sottosistema di chiave di* (1). *Se* $u(0)$ *è la chiave di una* $\mathbb{K}$*-soluzione* $(a_1, \ldots, a_n)$ *di* (1)*, possiamo calcolare* $u(T)$ *mediante* (4) *senza conoscere* $v(0)$.

Se abbiamo il ciphertext $v(T)$*, conosciamo allora lo stato finale* $(u(T), v(T))$ *di* $(a_1, \ldots, a_n)$. *Il sistema inverso* (2) *è capace quindi di calcolare lo stato iniziale* $(u(0), v(0))$ *di* $(a_1, \ldots, a_n)$ *ed in particolare il plaintext* $v(0)$.

In altri termini, la funzione di decifratura $D_{u(0)} : \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^l$ *si ottiene come la mappa* $v(T) \to v(0)$ *che è calcolabile mediante i sistemi* (2) *e* (4).

Definizione

Sia $\mathcal{C}$ un cifrario a blocchi alle differenze e sia $(u(t), v(t)) \in \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^l$ lo stato al clock t di una $\mathbb{K}$-soluzione di (1).
Denotato

$$v(t) = (a_{m+1}(t), \ldots, a_{m+1}(t + r_{m+1} - 1), \ldots, a_n(t), \ldots, a_n(t + r_n - 1)),$$

si consideri il corrispondente ideale lineare

$$J(t) = \sum_{m+1 \leq i \leq n} \langle x_i(t) - a_i(t), \ldots, x_i(t + r_i - 1) - a_i(t + r_i - 1) \rangle \subset R.$$

Infine, poniamo $J = J(0) + J(T)$.
Un attacco algebrico a $\mathcal{C}$ mediante la coppia plaintext-ciphertext $(v(0), v(T))$ *consiste nel calcolare le $\mathbb{K}$-soluzioni $(a_1, \ldots, a_n)$ tali che $(a_1, \ldots, a_n) \in V_{\mathbb{K}}(J)$. Se $I = \langle x_1(r_1) - f_1, \ldots, x_n(r_n) - f_n \rangle_\sigma \subset R$ vogliamo cioè calcolare $V_{\mathbb{K}}(I + J) = V_{\mathbb{K}}(I) \cap V_{\mathbb{K}}(J)$.*

Sorvoliamo sulle possibili varianti di un attacco algebrico ad un cifrario a blocchi alle differenze (coppie plaintext-ciphertext multiple, etc) ed i loro costi computationali. Una vulnerabilità di un tale cifrario è avere un periodo piccolo per il sottosistema di chiave che permette un attacco di tipo meet-in-the-middle. Questa vulnerabilità si riscontra in Keeloq.

$$\begin{cases} k(64) &= k(0), \\ x(32) &= k(0) + x(0) + x(16) + x(9) + x(1) + x(31)x(20) \\ & \quad + x(31)x(1) + x(26)x(20) + x(26)x(1) + x(20)x(9) \\ & \quad + x(9)x(1) + x(31)x(9)x(1) + x(31)x(20)x(1) \\ & \quad + x(31)x(26)x(9) + x(31)x(26)x(20). \end{cases}$$

Il sottosistema di chiave di Keeloq è l'equazione lineare alle differenze (LFSR) $k(64) = k(0)$ che ha periodo 64.

CONCLUSIONI

- I sistemi di equazioni esplicite alle differenze su campi finiti modellano molti cifrari a flusso ed a blocchi di interesse applicativo (il cifrario a flusso E0 di Bluetooth appartiene a questa classe, etc).
- Questa modellizzazione permette di studiare importanti proprietà dei cifrari, quali la loro invertibilità, e di definire correttamente attacchi algebrici necessari a stimare la loro sicurezza.
- La nozione di “cifrario alle differenze” permette quindi di sviluppare *nuovi cifrari* semplicemente definendo le loro equazioni alle differenze e studiandone la crittoanalisi.

Tutti i dettagli in:

R. La Scala, S.K. Tiwari, Stream/Block Ciphers, Difference Equations and Algebraic Attacks, ArXiv 2003.14215.

Direzioni di ricerca

- Sviluppare metodi simbolici per calcolare e massimizzare (migliorare la sicurezza) il periodo di un sistema invertibile nel caso non-lineare.
- Estendere le funzioni di transizione di stato a mappe più generali per includere più cifrari nello stesso modello teorico.
- Studiare il problema di come conservare la struttura di ideale alle differenze quando si valuta una variabile sulla successione dei suoi valori. È il problema di imporre ad un cifrario a flusso alle differenze un determinato keystream.
- Sviluppare ed implementare solver efficienti (basi di Grobner alle differenze, insiemi caratteristici, etc) capaci di trovare le soluzioni di un sistema esplicito alle differenze sotto certe condizioni. Questo ottimizzerebbe gli attacchi algebrici ai cifrari alle differenze migliorandone la crittoanalisi.